ALGEBRA M1 - Lista 8

Rząd macierzy, układy równań, macierze odwrotne

Zad.1. W każdym z poniższych układów jednorodnych równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$ znaleźć ogólne rozwiązanie układu i jeden z układów fundamentalnych rozwiązań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Zad.2. Znaleźć rząd macierzy rzeczywistych i wyznaczyć maksymalny liniowo niezależny układ kolumn:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zad. 3. Pokazać, że jeżeli macierz A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

gdzie A_1, A_2 są macierzami, natomiast zera oznaczają macierze zerowe (odpowiednich wymiarów), to

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_1) + \mathrm{r}(A_2)$$

Zad.4. Sprawdzić, dla jakich wartości parametrów $p, q, r \in \mathbb{R}$ ma rozwiązanie układ

$$\begin{cases} -ry + pz = 1 \\ rx - qz = -1 \\ -px + qy = 1 \\ qx + py + rz = -1 \end{cases}$$

Wsk. Wyznaczyć rząd odpowiednich macierzy obliczając odpowiednie wyznaczniki.

Zad. 5. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych p, q, układ równań ma rozwiązanie:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y + pz = 2 \\ qx + 2y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Zad.6. Stosując wzory Cramera, rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 14 \\ 4x+3y-z &= 7 \\ x-y+z &= 2 \end{cases}$$

Zad.7. Wyznaczyć ilość rozwiązań układu w zależności od parametru rzeczywistego p:

$$\begin{cases} x+py-z &= 1 \\ x+10y-6z &= p \\ 2x-y+pz &= 0 \end{cases}$$

Wsk.: Najpierw wyznaczyć wartości p, dla których układ jest układem Cramera.
Zad.8. Dowieść, że jeżeli $A \in M_n(\mathbb{K})$ jest macierzą trójkątną górną (dolną), to A^{-1}, jeżeli istnieje, jest także macierzą trójkątną górną (dolną).
Zad.9. Znaleźć macierze odwrotne do macierzy rzeczywistych

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Zad.10. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy zespolonej

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $a^2+b^2+c^2+d^2 > 0$.
Zad.11. Niech $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$. Znaleźć macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

przy odpowiednich założeniach dot. macierzy A, B, C.

Romuald Lenczewski